

計畫編號：11

計畫名稱：「摺紙數學與資訊融入教學之課程研發、實作與推廣（二）」

執行單位：新北市立林口國中

主持人：李政憲

電子信箱：[jenshian@yahoo.com.tw](mailto:jenshian@yahoo.com.tw)

### 一、計畫執行摘要

1. 是否為延續性計畫？（請擇一勾選） 是 否

2. 執行重點項目（請擇一勾選）：

- 環境科學教育推廣活動
- 科學課程教材、教法及評量之研究發展
- 科學資賦優異學生教育研究及輔導
- 鄉土性科學教材之研發及推廣
- 學生科學創意活動之辦理及題材研發

3. 辦理活動或研習會等名稱：

「摺紙中學數學」工作坊、「一張紙摺出藝術與數學」、「Escher 連續圖形解構」、「摺紙游藝與數學 II、III」、「十指大動，一紙搞定」及「拐摺六邊形」等外聘講座分享；中原大學師培班分享「從課堂教學到生活應用」講座，桃園縣山腳國中「鑲嵌藝術與數學」到校分享及新北市數學輔導團「創新教案教案甄選發表」及「從動手操作到創意發想：談摺紙與數學 II」全縣研習；國教輔導團永續經營論文研討會發表。

4. 辦理活動或研習會對象：

新北市林口國中、新北市暨桃園縣數學輔導團暨台北市、新北市、桃園縣暨新竹縣市各國中小教師。

5. 參加活動或研習會人數：

每次工作坊暨講座約 10 至 40 人，共舉辦六場研習，並對內外教學、發表與分享逾十場。

## 6. 參加執行計畫人數：

5~8 人（含主持人、協同主持人暨研究助理）

## 7. 辦理/執行成效：

本計畫辦理逾十五次「摺紙中學數學」工作坊，與教學現場老師討論教材的可行性，今年度並透過分享讓彼此更成長（圖 1 至圖 4）；而透過陳明璋教授、黃振順老師等交大 AMA 團隊的諮詢（圖 5、圖 6），除了確認數位檔案製作的完整性，並配合認知理論的相關應用，以「多面體氣球」簡報分享參與國教院所辦理的「2011 認知與數位教學及評量研討會」；期間除了普通班與社團課（圖 7 至圖 10）的實作，尚安排對校內外教師分享相關教材檔案（圖 11 至圖 14）；而為求教材的適用性，今年度首次以「摺紙學勾股定理」參與新北市數學科創意教案甄選榮獲第二名（圖 15、圖 16），並蒐集學生與教師回饋以確認教材的適用性。此外，今年更透過柳賢、李國偉、張世宗、曹博盛、鄒小蘭與單維彰幾位教授，以及蕭慶利、王樹文、陳彩鳳、彭良禎與楊期甬老師（圖 17 至圖 24）較去年更多的學者專家們諮詢，使社群的相關教師對此議題了解更為透澈。這兩年共計完成十大類別逾四百個數位檔案，藉由新北市以及桃園縣輔導團協助推動（圖 25 至圖 28），相信已使得這個議題讓更多教師重視，進而嘗試在教學上輔助使用，同時並透過學生回饋與教師互動，讓我們看到教師與學生們更多的收穫與感動（圖 29 至圖 32）。



圖 1 工作坊老師分享（葉麗珠）



圖 2 工作坊老師分享（楊梓）



圖 3 工作坊老師分享 (王雪芬)



圖 4 工作坊老師活動 (長庚醫院探視)



圖 5 交大陳明璋教授諮詢



圖 6 西松高中退休黃振順老師到校教材諮詢



圖 7 三芝國中普通班勾股定理教學



圖 8 林口國中普通班乘法公式教學



圖 9 普通班正多邊形摺紙學生分享



圖 10 社團課學生配合互動式簡報實作



圖 11 摺紙中學數學工作坊討論



圖 12 認知與數位教學及評量研討會發表



圖 13 山腳國中鑲嵌藝術與數學分享



圖 14 中原大學師培班摺紙應用教學



圖 15 新北市數學科創意教案討論



圖 16 新北市數學科創意教案發表



圖 17 中研院李國偉教授諮商



圖 18 國北教大張世宗教授分享



圖 19 師大資碩班鄒小蘭教授諮詢



圖 20 中央大學單維彰教授諮詢

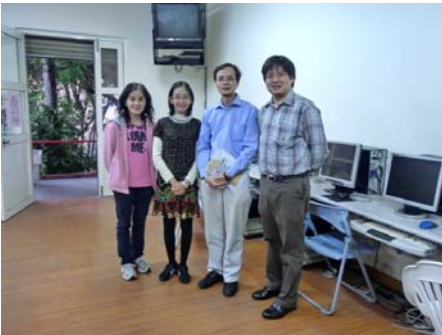


圖 21 蕭慶利老師連續圖形解構諮詢



圖 22 王樹文老師數學步道諮詢



圖 23 彭良禎老師多面體拼裝諮詢



圖 24 楊期甬老師摺變六邊形分享



圖 25 數學遊戲工作坊摺紙作品分享



圖 26 國教輔導團永續經營論文發表



圖 27 新北市數學輔導團教學演示研討



圖 28 山腳國中摺紙藝數社群實作



圖 29 新北市三芝國中教師觀摩互動



圖 30 桃園私立國際新興國小作品展示

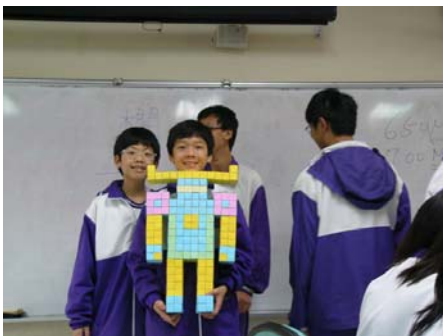


圖 31 新北市林口國中社團學生作品



圖 32 台北市螢橋國中學生實作回饋

## 二、計畫目的

- (一) 製作教材相關數位檔案，整合於網路平台，讓想要使用與討論的老師與學生們更為方便，目前已於本校「林中生命藝數殿堂」以及新北市數學輔導團網站陸續上傳，並配合課程進度實施中；
- (二) 將相關模型與數位檔案於社團與課堂中施作，讓學生從操作與討論中學習，透過摺紙融入生活學習與數學教學；

- (三) 基於資源共享的理念，持續聘請專家學者到本校專業教師社群，針對老師或學生作演講及研討諮詢，積極發展可實際運用於課堂的教材，讓教材發展更多元；也藉由社群教師彼此分享與互動，讓教材更完整與適性化；
- (四) 指導有興趣的學生作專題研究，發表研究心得，並將施作與研究的心得投稿相關科學期刊，藉以驗證其專業與普及性；並於相關教學實施完成後書寫心得，再行投稿相關期刊；
- (五) 製作相關模型，並於教研會與數學輔導團中分享簡報與施作心得，吸引更多有興趣的老師們投入及參與推廣，在學校活動及相關研習進行推廣；

### 三、研究方法

接下來分為幾個向度與方式，說明本計畫目前的實施狀況：

#### (一) 相關資料蒐集：

結合筆者已有相關資料，添購所需書籍，並配合網路資料，整合一套有系統的教材。目前累積已添購的相關書籍逾百本。

#### (二) 摺紙簡報製作：

藉由相關文獻之補齊，設計發展一套關於摺紙與數學之數位教材，以下將相關資料完成簡報分幾何性質、正多邊形、平面造型、正多面體、立體造型、摺紙作品、教學心得、中學數學、幼兒教學與學生作品十類逾 400 個（如附件光碟），並針對以下國中課程內容加以探討：

1. 摺紙的對稱性：含線對稱與點對稱與摺法的相關探討（八下、延伸）；
2. 摺紙與乘法公式：透過摺紙學習乘法公式，並比較與傳統教學的異同（八上）；
3. 摺紙的定量探討：含角度、線段與面積關係的相關計算，以及摺紙與無理數及勾股定理的相關討論（八上、八下、九上、延伸）；
4. 摺紙的全等與相似：摺紙完成圖與展開圖的比較，探討多邊形的全等及相似關係（八下、九上、延伸）；
5. 摺紙與多邊形：摺紙完成正多邊形的準確性及相似性，以及相關的

應用討論（八下、延伸）；

6. 摺紙與立體圖形：透過摺紙完成正多面體，並透過模型製作進一步探討其數學性質（八下、九上、延伸）；
7. 摺紙與尺規作圖：探討摺紙與尺規作圖的相關性與差異性（八下）；
8. 生活中的摺紙：如影印紙與名片紙的摺紙討論，以及信封與紅包袋的摺紙應用（八下、九上）；
9. 其他摺紙與數學：如摺紙考題、造型摺紙與摺紙名片製作等（綜合、延伸）；

### （三）摺紙教材施作：

就以上完成的教材簡報及數位檔案，挑選部份教材，藉由小眾、普通班、或社團，分享所設計之教材與製作成果，吸引更多學生對這個議題有所興趣，進而投入研究。筆者並於今年針對部份內容先後完成以下教材：

1. 上課簡報部份：如附件光碟內容，相關簡報均已建置完成，並陸續放置於林中生命藝數殿堂網站：

<http://163.20.9.8/dyna/menu/index.php?account=math> 中，接下來將針對其他年級及需求設計更完整的課程與簡報。

2. 摺紙作品部份：共計完成模型摺紙風車、Escher 翻轉正方形、十二星座拐摺六邊形與十二生肖二十四面體等自製模型。

### （四）指導學生專題研究：

指導有興趣的學生（如數學步道、社團課等）針對其有興趣議題加以研究，進一步發表相關其研究心得，讓更多的學生與老師分享相關研究成果。今年度指導學生以「畢氏摺學——利用摺紙摺出畢氏數」有幸榮獲新北市數學科科展特優獎項，也指導社團學生完成翻轉正方形、山茶花摺紙討論與摺紙展開圖等議題。

### （五）投稿相關競賽期刊：

整理數位教材施作後的研究心得，投稿相關科學期刊，確認其內容的學術性以及普及性，今年投稿累積計三篇，其中「《摺紙中學數學》



之黃金試金石」已發表於科學教育月刊第 345 期，「摺紙學勾股定理」教案投稿新北市數學輔導團創新教案甄選榮獲第二名，並將其相關實施心得撰寫「『摺紙中學數學』教學心得——從『勾股定理』證明談起」一文投稿國教輔導團永續經營論文研討會發表並收錄於論文中。

(六) 充實數學步道：

近兩年本校三位數學老師相繼退休，加上數學資優營實施連續三年，使本校有固定一群願意為數學教育與環境投入的人力，加上本校教務處的大力支持，使得教學現場與退休教師合力指導學生進行數學步道與生活中的數學討論。藉由上述多面向的研究發表，陸續充實相關討論內容，培養本校這個鄉下地方孩子們更多對數學的感覺；目前與參與步道同學及老師們討論「對稱摺紙」與「摺出畢氏數」議題，並已將相關成果實施於資優營隊、普通班教學與科展作品投稿。

(七) 摺紙模型製作印刷：

藉由相關資料的蒐集與題目的設計，印製相關出版品，藉以於社團、普通班及本校教研會、數學科輔導團中作分享與討論，本年度共計完成 Escher 風車、摺紙正六面體與切割六面體三個模型。

(八) 舉辦相關講座、研習與專家研討：

邀請對摺紙議題學有專長的老師到校分享，讓更多的孩子與老師們針對這方面的知識吸收來源更多元，想法更豐富；並與相關專家學者討論，探討與學生施作完的後續成效，以及實際適合運用於一般課堂上的教材。目前邀請李國偉教授分享「一張紙摺出藝術與數學」、蕭慶利老師分享「Escher 連續圖形解構」、張世宗教授分享「摺紙游藝與數學 II、III」、楊期甬老師分享「十指大動，一紙搞定」以及陳彩鳳老師分享了「拐摺六邊形」內容議題，並且也與陳明璋、曹博盛、柳賢、鄒小蘭與單維彰教授，彭良禎、王樹文與黃振順老師等學者專家們諮詢研討。

(九) 數學科教研會與數學輔導團分享：

除定期於本校社群與教研會分享相關摺紙模型與文章，也透過了「摺紙學乘法公式」的教學觀摩，直接與教學現場老師互動；而在輔導團中的分享，透過三芝國中「摺紙學勾股定理」與本校的教學觀摩，以

及「創新教案教案甄選發表」、「從動手操作到創意發想：談摺紙與數學 II」全縣研習以及國教輔導團永續經營論文研討會，得以讓更多教學現場的老師們了解相關議題。

(一〇) 網頁交流互動：

網路的影響無遠弗屆，藉由網路互動也使得人與人的溝通沒有時間與地域性的限制。目前已陸續將以上的相關資料整合於本校數學科網站「林中生命藝數殿堂」中，並透過新北市數學輔導團的相關研習與網站推廣，藉由相關教師與學生的回饋，相信已使得更多教師與孩子們得以受益，並進一步有意願應用於課堂上，提昇對數學的熱愛與興趣，營造討論的風氣，讓這些建置的資料能更有效地應用於教育現場中。如普通班課堂的正式教學、資優營隊與數學步道互動以及校內外老師取經等，均能透過網頁及電子郵件作直接與間接教學及溝通。

#### 四、研究成果

從前年筆者第一次參加師大數學系洪萬生教授所舉辦的「摺紙學數學」工作坊，對摺紙融入數學產生興趣，期中曾指導學生作摺紙融入數學「顛覆柏拉圖—探討如何由單張正方形摺成正多面體」參與科展獲得本鄉鄉展特優殊榮，待去年度開始進行科教計畫，藉由逾百本的蒐集書籍，以及參考相關的網站數十個，累積了相當的參考資訊，這兩年實際教學逾四十堂課，施作心得六篇，針對校內外數學教師舉辦相關研習逾二十場，以及本年度指導數學步道學生以「畢氏摺學」參與新北市數學科科展榮獲特優等內容，都是筆者研究計畫與經營社群，積極對校內外推廣摺紙融入數學與實際教學，歷歷在目的證明，針對研究目的，已達到的成果如下：

(一) 研發課程教材：

所製作的教材配合課程進度，目前計修正了去年八、九年級的部份課程「摺紙學乘法公式」、「摺紙學商高定理」、「摺紙與正多邊形」、「立體摺學」、「摺紙與對稱」等簡報，也於今年新增了「摺紙風車」、「一張紙摺出正多面體」、「摺出畢氏數」（如附件一至八）等配合八、九年級進度的新課程，並於社群討論後，於課堂陸續實施，且在本校「林中生命藝數殿堂」網站與新北市數學輔導團網站進行上傳。透過回饋單統計，學生的學習與教師的回饋普遍反應良好，並能運用

於解題應用及教室佈置等情境；例如「摺紙學乘法公式」即是透過摺紙方式，學習證明乘法公式時尚未具備的幾何概念；而「摺出畢氏數」則是由學生操作計算後，透過勾股定理與一元二次方程式的應用，進一步學習畢氏數的概念。而除了本人與在校教師們於林口國中及新北市輔導團的推動外，桃園縣山腳國中謝熹鈺老師（目前為桃園縣數學輔導團團員）針對相關教材的實作與對外推動也不遺餘力，除在任教班級進行「摺紙學乘法公式」、「摺紙學商高定理」、「摺出重心、內心、外心」教學，並在校內成立了摺紙藝數社群，討論摺紙與數學及藝術的相關概念連結，目前已探討的內容有「魔術摺紙」應用於學生畢業典禮的感謝卡上，「摺紙學尺規作圖」應用於數學課程中輔助學生尺規作圖的學習，討論「摺紙玩具-會飛的蝴蝶」如何結合數學的對稱課程與藝術課程，學習「一張A4紙摺出正多面體」並探討A4紙的邊長比例原由進而認識「白銀比例」；校外推動除在輔導團至瑞平國中學校分享摺紙學正六面體、摺紙與基測試題並展演「多面體氣球」，並嘗試與桃園縣愛迪兒幼稚園大班學童進行摺紙教學互動，另外於新興國際中小學國小部二年級班級進行「摺紙中學數學」示範教學：透過摺康乃馨花檢測學生對平行與垂直的學習成效，摺體操人檢測學生對分數的了解。讓更多年齡層的學生們感受摺紙的感動，並吸引更多有興趣的老師加入「摺紙中學數學」的教學行列。

(二) 製作模型施作：

將相關模型與數位檔案於社團、課堂與活動中施作，除了修正去年已完成的「正四面體模型製作」、「正六面體模型製作」、「黃金比例摺紙」，以及「『立體摺學』課程」等簡報，今年更新增「Escher摺紙風車」、「翻轉四面摺紙」、「十二星座拐摺六邊形」、「十二生肖二十四面體」（如附件九至十五）等新模型與相關簡報，這些都是透過摺紙融入生活學習與數學教學的極佳方式；

(三) 專家學者諮詢：

基於資源共享的理念，持續聘請專家學者到本校、社群或輔導團，針對老師或學生作演講及研討諮詢，積極發展可以實際運用於課堂的教材，讓教材發展更多元；目前計邀請了李國偉教授分享「一張紙摺出藝術與數學」（如附件十六）、蕭慶利老師分享「Escher連續圖形解

構」、張世宗教授分享「摺紙游藝與數學 II、III」、楊期甬老師分享「十指大動，一紙搞定」（如附件十七至十九）以及陳彩鳳老師分享「拐摺六邊形」（如附件二十）內容議題，並且與陳明璋、曹博盛、柳賢、鄒小蘭與單維彰教授，以及彭良禎、王樹文與黃振順老師等學者專家諮詢研討。

（四）研究發表投稿：

指導有興趣的學生作專題研究，發表研究心得，並將施作與研究的心得投稿相關科學期刊，藉以驗證其專業與普及性；至目前已完成了六篇實施文章心得，其中「『摺紙中學數學』社群經營與專業成長」與「『摺紙中學數學』教學心得——從『勾股定理』證明談起」（如附件二十一、二十二）兩篇分別收錄於『數學領域輔導團永續經營論文集』I 與 II 中；而「摺紙中學數學之紅包花花」與「摺紙中學數學之黃金試金石」（如附件二十三、二十四）已投稿科學教育月刊並獲刊登，而「摺紙學勾股定理」榮獲新北市數學輔導團創新教案甄選競賽榮獲第二名（附件二十五），「畢氏摺學——利用摺紙摺出畢氏數」（附件二十六）參加新北市數學科科展榮獲特優，均是在這兩年的研究下，所產生的豐碩成果。

（五）校內校外推廣：

製作相關模型，並於教研會與數學輔導團中分享簡報與施作心得，吸引更多有興趣的老師們投入及參與推廣；今年度計辦理逾十五次的「摺紙中學數學」工作坊以及「一張紙摺出藝術與數學」、「Escher 連續圖形解構」、「摺紙游藝與數學 II、III」、「十指大動，一紙搞定」及「拐摺六邊形」等外聘講座分享；也於中原大學師培班分享「從課堂教學到生活應用」講座（如附件二十七），桃園縣山腳國中進行「鑲嵌藝術與數學」（如附件二十八）到校分享及新北市數學輔導團「創新教案教案甄選發表」（如附件二十九）及「從動手操作到創意發想：談摺紙與數學 II」（如附件三十）全縣研習，更在國教輔導團的論文研討會發表「『摺紙中學數學』教學心得——從『勾股定理』證明談起」文章，相信已使得本校與他校的數學科老師，對於摺紙與數學的相關議題，更加了解與有意願投入。

五、討論及建議（含遭遇之困難與解決方法）

綜觀筆者近兩年的推廣，推動摺紙相關教學時仍有其限制存在；由於個人的推動不易，在前年暑假與幾位現場老師互動後，經交通大學陳明璋教授指導成立桃園區 AMA 工作坊暨「摺紙中學數學」專業社群，今年也利用週一下午的空堂時間，結合 AMA 數位製作學習，討論相關數位檔案，確認教材之可行性。而社群的組成除力邀本校退休教師王樹文老師，尚有王雪芬、余明興、楊梓、陳玲吟、葉麗珠及洪士禹等老師，以及桃園縣山腳國中暨輔導團的謝熹鈺老師加入，加上本校賴韻竹老師提供班級試教並給予模型製作意見。此外，更透過新北市輔導團的資源，引入師大曹博盛教授、高師大柳賢教授、台南大學謝堅教授、西松高中退休老師黃振順老師、新北市數學輔導團專輔李進福老師，以及江翠國中退休教師陳彩鳳老師、明湖高中楊期甬老師等學者專家們進行諮詢分享；加上本校資優營隊與資優班的經營資源，也得與中央大學單維彰教授、高師大鄒小蘭教授、師大附中彭良禎老師以及光華國中蕭慶利老師互動；期間尚透過中研院數學所李國偉教授與台北市教育大學張世宗教授與社群老師們作分享。而經與社群相關老師討論後，本計畫主要會遇到的困境及解決的對策有以下幾點：

(一) 多數操作需具備基礎數學先備知識：

由於國中幾何課程安排於八年級下學期，而不少幾何量的計算，則需用到八年級上學期的勾股定理，以及九年級上學期的相似形。在初期學生尚未具備相關先備知識基礎時，可採取的應變策略如下：

1. 選擇適當教材設計相關教案：如筆者去年實施「摺紙組合十字星」、以及幼稚園趣味摺紙教學相關簡報，以及今年度設計的「Escher 翻轉正方形」、「拐摺六邊形」（如附件三十一至附件三十三）等活動，能針對學生程度作不同題目的延伸設計並加以說明討論。一方面寓教於樂，另一方面也從做中學，加深對數學知識的理解與應用；
2. 挑選難度適中或局部重要步驟講解：如去年度在 AMA 研習中分享的「摺紙五等份」教學簡報，以及今年度所設計的「摺出畢氏數」（如附件三十四、三十五）課程，即透過簡單的摺紙動作，討論了二元二次方程式，甚至可發展至三角函數的數學概念，進一步能引發學生與老師們討論，並實際應用於正六面體摺紙模型與計算畢氏數的課程中；

3. 利用適當的簡報與摺紙活動發展其數學概念：如去年度針對八年級學生進行的「摺紙學根式化簡」簡報（如附件三十六），則是透過摺紙，學習不易了解的根式化簡概念；並在師大「促進學生主動思考」工作坊由台北市成德國中莊國彰老師分享相關簡報與教學心得，獲得參與老師的踴躍回饋，而今年度於麗林國小推動的「正四面體摺紙」活動（如附件三十七），也是透過簡單步驟，介紹相關的數學概念，進一步作造型設計與資源再利用的課程；

（二）中學數學學習易受進度暨考試壓力限制：

目前國中數學配課時數各校不一，而受限於每次段考進度壓力，若要給學生進行摺紙實作，便容易影響原本的課程進度。目前針對此困境，可以調整的方式如下：

1. 於營隊、輔導課或社團課施作：如筆者去年在林口鄉國小科學營所安排的「從正多邊形對稱到多角星形設計」摺紙教學（如附件三十八），以及本校數學資優營的「立體摺學」課程，能在完整的四節課，分別介紹對稱、多邊形與多角星型，以及柏拉圖與阿基米德多面體與拼裝的相關概念，進一步作造型設計，既不受進度限制，更能視學生程度進行適當的教材補充與調整；
2. 選擇與課程相關性高，操作容易課程設計課程：如今年度修正後推動的「摺紙學乘法公式」與「摺紙學勾股定理」等內容，均能獲得施作學生與觀摩老師的正向回饋與高度肯定；
3. 透過學習單由學生回家操作，老師於課堂再行討論：如「乘法公式」與「勾股定理」摺紙教學，可配合相關設計的學習單（如附件三十九、四十），搭配網路資源上傳，由學生於課前先行施作，以減少教師的授課時間，並讓學生先行思考後，造成課堂上能有更多的互動，充份達到預定達到的教學目標；

（三）講解與操作不易同步學習：

摺紙教學最易遇到的問題是講解與操作無法同步，學生無法對照教師步驟完成，進一步學習與討論，而教師可採取以下的方式調整上課模式：

1. 配合多元彈性開關，設計容易閱讀簡報：如「六角芒星互動式簡報」

與「山茶花互動式簡報」（如附件四十一、四十二）的設計，能因教學者的不同需求，作摺紙教學的前後對照與相關問題討論等，同一簡報適用於摺紙教學、數學討論與綜合比較。而「太陽花相框摺法」（如附件四十三）更針對中學與小學學生在同一簡報內設計不同難度題目，可依學生程度與教學進行作彈性呈現，並已於今年由筆者經鄒小蘭教授指導，在師大在職資優碩士學分班與社團課進行實際操作與互動；

2. 利用大型教具或搭配實物單槍投影機相輔相成：如大型色紙以及實物單槍、視訊攝影機的運用，能讓教學時與學生同步進行，不致造成教師巡堂的時間浪費與數位落差等；或是透過電腦教室的自行操作或統一廣播，讓學生一人一機可對照參考，注意力更易集中。

#### （四）教材設計缺乏信度效度：

所設計的教學簡報與相關學習單內容，較缺乏實測與對照，無法確認是否適合搭配或取代原本的傳統教學；而針對這一個缺點，教師可採取以下的方式作調整：

1. 根據教學進度，進行實驗組與對照組的前後測：如「摺紙學勾股定理」的前後測，經相關數據比較，摺紙教學與傳統教學的差異不大；
2. 設計學生回饋，了解學生進行摺紙教學後收穫：如「摺紙中學數學回饋單」與「新北市數學輔導團教學演示回饋單」暨相關統計資料（如附件四十四、四十五），皆能看到學生進行教學後的高度肯定；
3. 透過專家社群，修改相關學習單以及教學簡報：如「摺紙學勾股定理」、「摺紙學乘法公式」及「摺紙十字羅盤」等相關學習單與簡報，皆能透過專家的建議與社群的實作互動，修改相關內容，確認步驟化呈現的完整性，以及相關認知與學習的落差是否過大。

最後再一次感謝本校曾富明校長與鍾兆晉、劉義龍、鄧亦琇主任全力支持與肯定，讓本計畫在校內外的推動，得以順利進行。而承蒙去年期末報告時師大陳昭地教授的指導鼓勵，跨縣市「促進學生主動思考」工作坊時林福來教授的建議，以及今年度所有參與工作坊以及教師研習時的教師互動，配合課程進行的學生回饋，以及所有參與諮詢的學者專家們協助，讓筆者這兩年所設計的摺紙與數學相

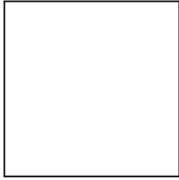
關教材，發揮最大的效果。



## 附件 一 摺紙學乘法公式

摺紙與乘法公式  
~完全平方和 篇  
交大AMA團隊/北縣數學輔導團  
北縣林口國中 李政憲  
[jenshian@yahoo.com.tw](mailto:jenshian@yahoo.com.tw)

正方形色紙



沿邊摺出任意垂線後還原



沿邊摺出任意垂線後還原

設原正方形邊長被分割為 $a$ 、 $b$ 兩線段




## 附件 二 摺紙學商高定理

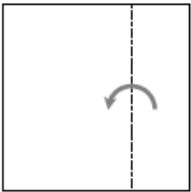
摺紙證明勾股定理

北縣林口國中 李政憲  
[jenshian@yahoo.com.tw](mailto:jenshian@yahoo.com.tw)

正方形色紙

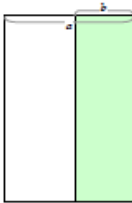


向左摺出任意線段



向左摺出任意線段

設摺進來的長度為 $b$ 、  
剩餘的長度為 $a$




Q1: 請問剩餘白色長方形的長與寬分別為多少?

### 附件 三 摺紙與正多邊形

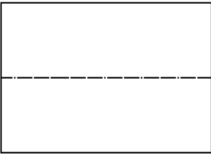
A 4 紙張摺出正三角形

北縣林口國中  
李政憲  
[jenshian@yahoo.com.tw](mailto:jenshian@yahoo.com.tw)

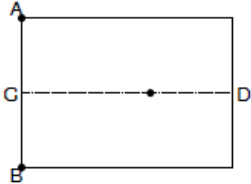
A4紙張



沿短邊對摺後還原



固定A點將B點摺至線段CD上



### 附件 四 立體摺學

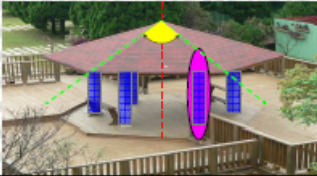
林口國中「立體摺學」課程  
～當柏拉圖遇到阿基米德……

新北市林口國中/數學輔導團  
桃園縣山腳國中/數學輔導團  
李政憲、謝其鈞  
[jenshian@yahoo.com.tw](mailto:jenshian@yahoo.com.tw)  
[articaic@gmail.com](mailto:articaic@gmail.com)




林中添秀亭……

- 若頂面的三角形均為等腰三角形，實際的屋頂由幾個三角形所構成？
- 若所有屋頂的等腰三角形均為全等，則每一個排在屋頂三角形頂角的角度比 $60^\circ$ 度大、小或相等？



多面體氣球製作……

- 從一個故事談起……
- 想想看，在不同狀態時，整個圖形表面積比為多少？
- 如何利用尺規，在色紙內畫一個正六邊形？
- 如何利用摺紙方式，摺出一個正六邊形？
- 這個正六邊形是最大的嗎？
- 參考故事的敘述，完成多面體氣球製作。


從多面體氣球到「柏拉圖多面體」

- 觀察在各狀態，每個頂點所接的正三角形各是多少？
- 在各頂點所接多邊形均為數目相同且全等的正多邊形時，我們稱為「柏拉圖多面體」，請問哪種狀態為柏拉圖多面體？
- 想想根據柏拉圖多面體的定義，頂點可以接的正多邊形有哪些？
- 在所接不同的正多邊形時，柏拉圖多面體每個頂點可以接的面各有幾個？

## 附件 五 摺紙與對稱


所謂的對稱.....

- ※ 區分為線對稱與點對稱
- ※ 請問線對稱的圖形一定會點對稱嗎？
- ※ 請問點對稱的圖形一定會線對稱嗎？
- ※ 試舉出同時會線對稱與點對稱的圖形：
- ※ 正多邊形會對稱嗎？
- ※ 想想看剛剛所摺的線對稱圖形，是否為點對稱圖形？要如何保證摺完的圖形為點對稱圖形？



摺個多邊形吧！

- ※ 一張長方形紙，如何摺出正方形？為何是正方形？
- ※ 如果換成不規則形狀的紙張呢？要如何摺出直角？
- ※ 一張正方形色紙，要如何摺出正八邊形？又為何是正八邊形？
- ※ 一張正方形色紙，要如何摺出正三角形？又為何是正三角形？
- ※ 如何從正三角形摺成正六邊形？
- ※ 可以直接從正方形摺成正六邊形嗎？

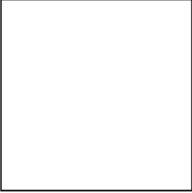


## 附件 六 摺紙風車

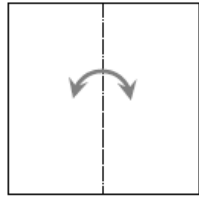
魔術摺紙 PART1  
連體船/蝴蝶/帆船/  
風車/花 篇

北縣林口國中 李政憲  
分享於 麗林國小附幼  
[jenshian@yahoo.com.tw](mailto:jenshian@yahoo.com.tw)

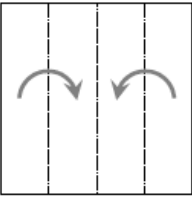
正方形色紙



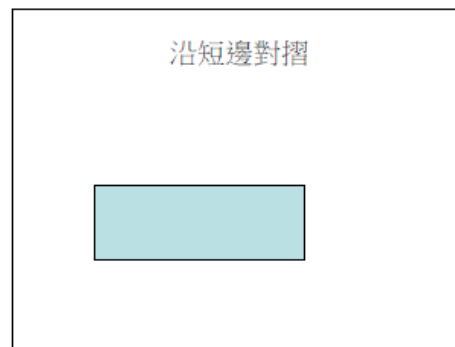
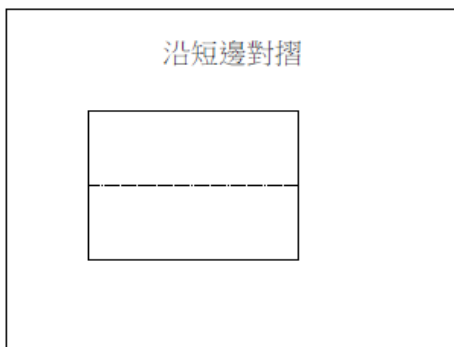
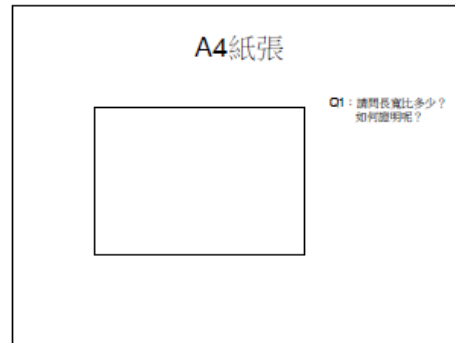
左右對摺後還原



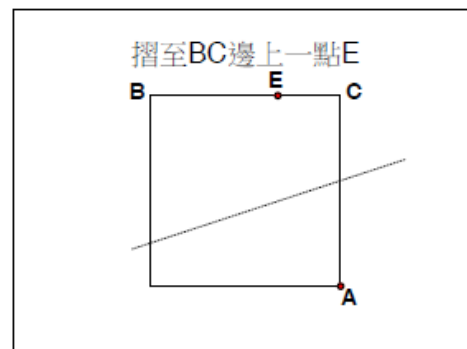
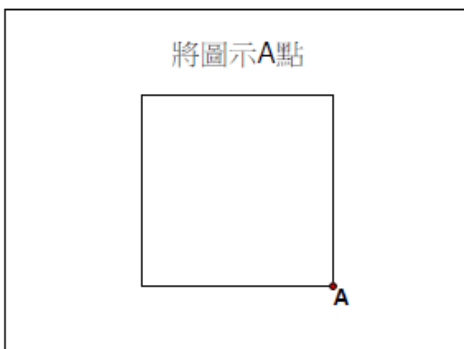
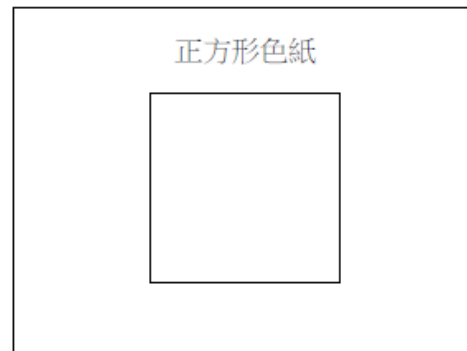
左右往中線摺



## 附件 七 一張紙摺出正多面體



## 附件 八 摺出畢氏數



附件 九 正四面體模型製作

正四面體模型組裝

1. 裁下正方形
2. 沿-----外摺(圖在外, 兩側稍後完成)
3. 沿.....內摺(圖在內, 注意勿摺到圖)
4. -----朝外壓摺, .....朝內壓摺, 依序①②③④壓在右下正三角形上, ⑤壓⑥後與其相扣;
5. 將⑧⑨收至⑦下方後, 將A角收至③④兩面中, 並按①壓②壓③收邊至⑦下方完成。

附件 十 正六面體模型製作

**組裝說明:**

1. 沿山線外摺(圖在外)
2. 沿谷線內摺;
3. 分別將①②、⑤⑥壓平成三角形;
4. 分別將①②、⑤⑥三角形塞入③④、⑦⑧處層完成五面成下方體缺一面;
5. 按照①壓②壓③收成一面, 塞入④底下完成最後一面。

**參考資料:**

1. Origami Studio: <http://www.origami.com/studio/gallery.asp?ID=assort1>
2. 精中生命藝數教室: <http://163.20.3.84/rmc/news/index.shtml?column=math>

**圖示說明:**

1. 山線: - - - - -
2. 谷線: ······

表示摺疊後突起成山型  
表示摺疊後凹下成谷型

**延伸思考:**

1. 請問圖中的各圖 對稱軸 各為幾條?
2. 請問完成作品後 a. 邊旁 的兩個面分別是哪幾個?
3. 請問如何利用一張正方形紙張(或A4紙張), 透過摺紙完成如圖長寬比的 最大長方形?

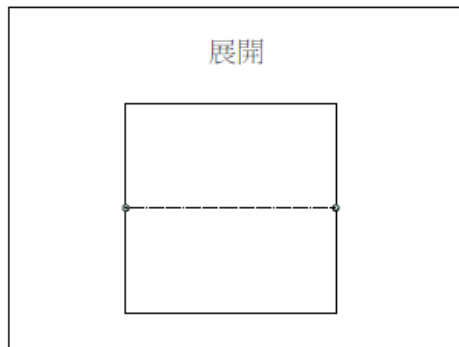
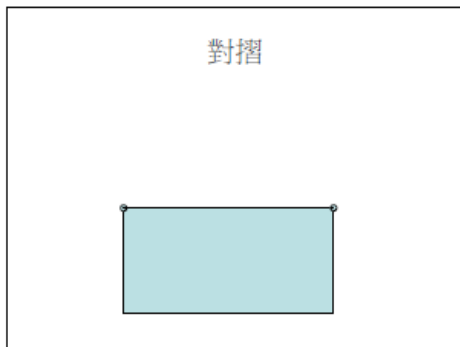
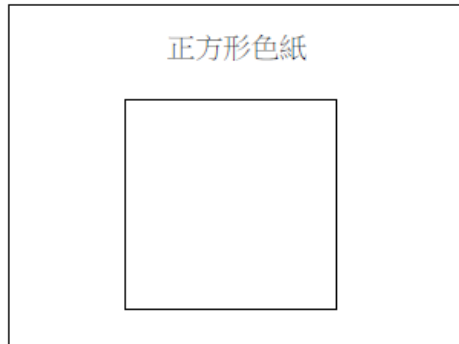
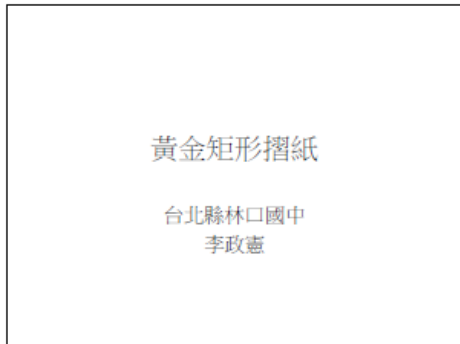
**Designed by:**

交通大學 陳明章教授  
新北市林口國中 數學輔導團 李政憲

[mjchen@mail.ntu.edu.tw](mailto:mjchen@mail.ntu.edu.tw)  
[jenshian@jainoo.com.tw](mailto:jenshian@jainoo.com.tw)

**光點六面體**

## 附件 十一 黃金比例摺紙



## 附件 十二 Escher 摺紙風車

<p>健康</p>		<p>行賞</p>
	<p>新北市林口國中 特色 Escher 風車</p>	
<p>快樂</p>		<p>純 能力</p>

**製作理念：**

紙鶴展翅 騰程萬里 歡  
圓形拼貼 傳承不歇  
收納連續 充不不  
風車運轉 生生不息  
校園願景 方正不歪  
動手操作 摺紙教學  
資訊融入 輔助理解  
專家社群 精進教學

**組裝方式：**

- 沿正面圖示摺出山線；
- 沿正面圖示摺出谷線；  
(正面照片無標線處)
- 沿背面圖示摺出山線；
- 沿背面圖示摺出谷線；

圖示說明：  
1. 山線：-----  
表示摺疊後突起成山型  
2. 谷線：-----  
表示摺疊後凹下成谷型

**數學思考：**

- 請問如何摺出正方形邊長三等份？
- 請問他的現象與摺紙藝術有何關係？
- 請問圖的圖樣共有幾種平行四邊形？
- 若色紙面積將連續摺疊，最多與最少摺出幾種色角多少？(含摺紙與收折)

以上問題若有任何想法，歡迎與課程  
作者互動，或至本校數學科網站：  
「孫中生命數學教室」留言！  
<http://163.20.9.8/dyna/menu/index.php?account=math>

**參考資料：**

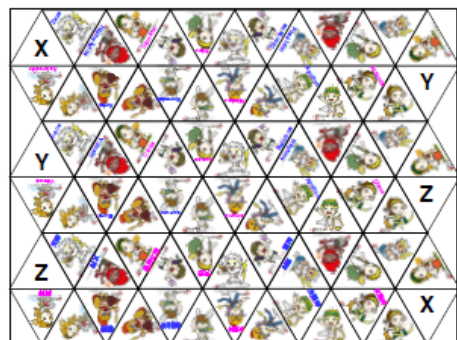
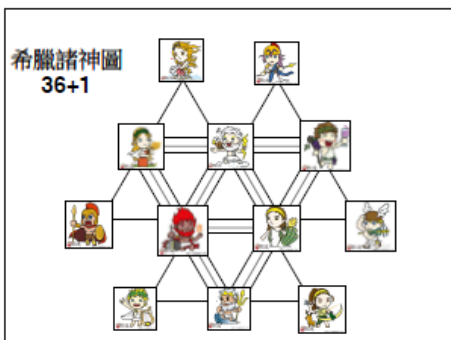
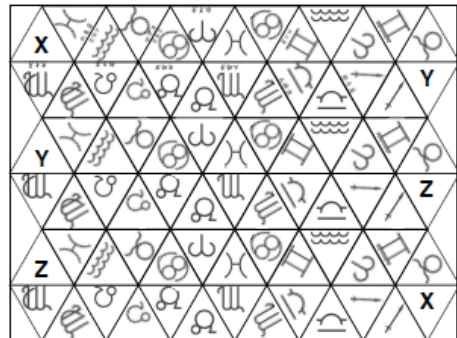
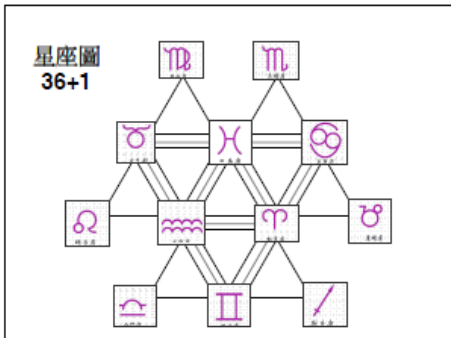
- 風車摺紙方式：  
摺紙藝術摺紙百科，視傳文化出版。  
<http://www.ami.com.tw>
- Escher 連續圖案來源：  
<http://www.escher.com>
- 當地紙藝-台灣文化進步地圖

Made by AMA  
新北市林口國中 / 數學輔導團  
教育碩士 小學的數學教育  
「摺紙教學與文化傳承」主持人  
李政憲製  
[jenshian@yahoo.com.tw](mailto:jenshian@yahoo.com.tw)

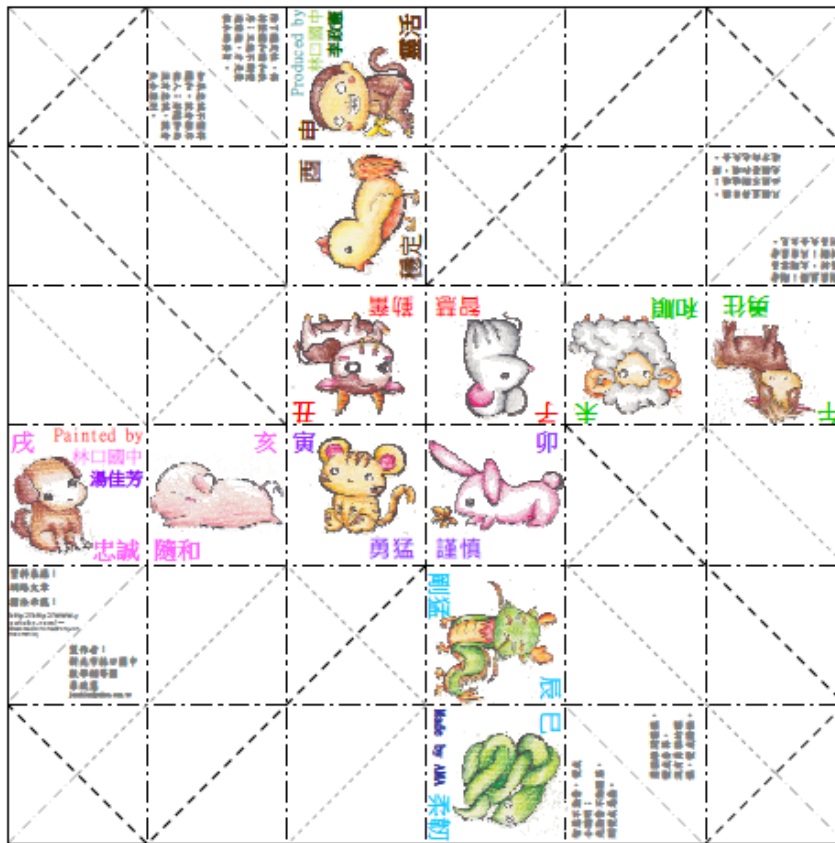
附件 十三 翻轉四面摺紙



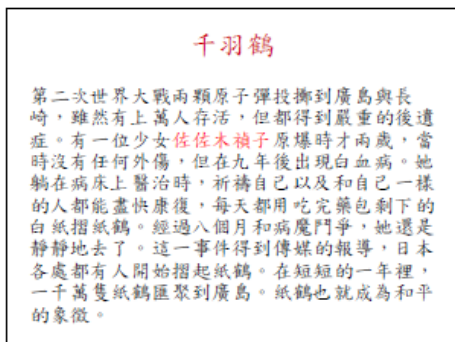
附件 十四 十二星座摺摺六邊形



附件 十五 十二生肖二十四面體

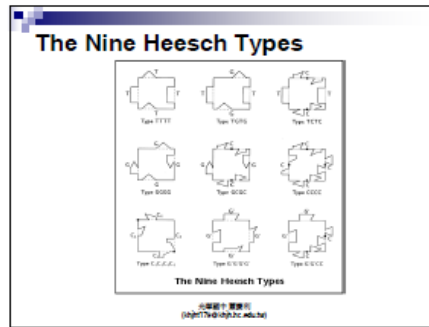
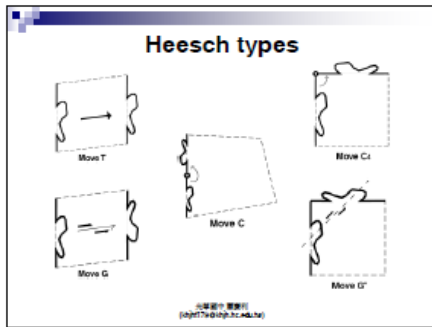
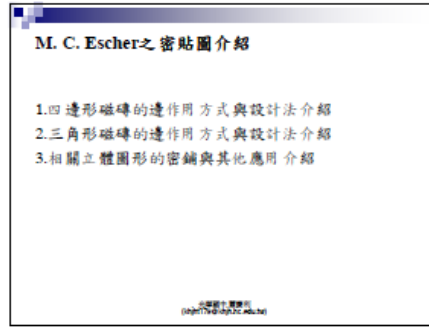


附件 十六 一張紙摺出藝術與數學





## 附件 十七 Escher 連續圖形解構



## 附件 十八 摺紙游藝與數學 II、III

[創意游藝教育教材-數學] © Dr.S.T.Chang - 1106

**《創意樂育·游藝教材 - 數學》**

□◇△  
張世宗 教授  
國立台北教育大學 / ETE 游藝研究室

□前言—教育“三何”問題：「用何」(What) / 「如何」(How) / 「為何」(Why)

**壹·教育基本理念**

- 一、三種學習管道：
  1. 學校「教」(被動)、2. 生活「玩-學」(主動)、3. 文化「習」(自動)
- 二、學習模式的討論：
  1. 「行為學派」vs. 「建構學習」
  2. 兩種學習模式：「正式學習」vs. 「非正式學習」(生活/游藝學習)
- 三、學習方向(Aims)的比較：「學科內容」/ 「學科方法」/ 「學科態度」

**貳·「數學」的學習**

- 一、數學內容四大領域：1. 「數」/ 2. 「量」/ 3. 「圖形/空間」/ 4. 「關係」
- 二、學習方法之比較：
  1. 學校數學：抽象/邏輯/精確(西方特質) — “教”數學
  2. 生活數學：多元/在地/統整(地域環境) — “玩”數學
  3. 傳統數學：具體/實用/近似(東方特質) — “習”數學
- 三、教學策略之比較：傳統態度 / 學校教學 / 開放教育 / 游藝樂育

**參·非正式「數學」教材(樂育活動體驗)**

- 一、年度游藝：「年度魔術方陣」、「猜星期」…〔數〕
- 二、庶民數學：「記數法」、「指算法」、「糧信點兵」…〔數〕
- 三、匠師口訣：「徑一周三」、「方五斜七」、「五角亭口訣」…〔量〕
- 四、**剪拼幾何**：〈巧合三才/奇合四喜〉、〈七巧几〉、〈一刀剪〉…〔圖形〕
- 五、**剪拼故事**：〈小威歷險記〉、〈天堂與地獄〉 / 〈故事游藝〉…〔圖形〕
- 六、變形題：伸縮飛盤(2d)、扭魔環(1d/2d/3d單元)…〔空間〕
- 七、拓樸游藝：「驚雷扣」(巧環)、「仙人穿梳」(繩元)…〔關係〕
- 八、博奕游藝：「九子仙棋」(傳統乞丐游藝)、民間趣棋…〔關係〕

**肆·數學游藝樂育教材系統開發(案例說明)：**

- 一、傳統算術游藝：口算/指算/結繩算/籌算/珠算/算籌(Napier, Henry G.)…
- 二、二位游藝教具：「猜齡表」/「猜齡魔笛卡」/九連珠〔數〕
- 三、數論游藝教具：Rubik's Cube, 「交換群」/〔關係〕
- 四、傳統貴族游藝：清·象牙「游藝寶盒」(ETI “手提博物館”)


---

*我聽，我忘記； 我看，我知道； 我做，我瞭解。*

- 古語 -

From Dr. S.T. Chang's File © 1106

# 附件 十九 十指大動，一紙搞定



## 數「折」遊戲裡的數學

橋期爾老師

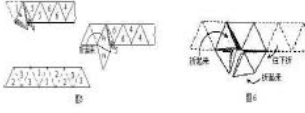
一、相關數學概念及原理：

<b>先備知識 (過去)</b> 動機：平文直的一公幾條 (正三角形)	<b>操作簡何能力 (現在)</b> 一列 n 格、二列 n 格之類 對稱圖形及旋轉圖形 (四 面環摺紙、等腰三角形等)	<b>後續發展 (未來)</b> 獨立思考、延伸思考
正六邊形 (幾何式的 證明、尺規作圖認 識)、正三角形	代數式計算 VS 翻摺 圖形之拼組與規則說明	多元操作、旋轉、設計、 解決問題能力
四邊與摺數基本概念 (結合：點、線、面)	觀察、整理、歸納成一 般式 (正、反兩面與三邊)	紀錄與形式思考能力

二、器材：紙 (特殊長條紙張 L:W=7:1)、筆、剪刀、橡皮擦、膠水、尺、  
電腦設備、ppt(教師使用)

三、目的：1.藉由將特殊長條紙張加以操作翻折成正六邊形的過程，加強學生對  
幾何圖形的觀察力及數學性質利用，歸納分析推得規律性，訓練其  
分析與推理能力。  
2.藉由翻折成正六邊形遊戲，探求隱藏了的格子與數字序號關係…  
等，增進對問題透徹思考的能力。

四、翻折規則說明：一張細長條 (9+1 個連接的正三角形格子組成)，用翻摺正  
三角形的方式，呈現出可以連續翻轉的正六邊形。這是一組非常有趣的平面魔翻  
轉 (莫比烏斯帶的一種，是有別於立體的魔術方塊)，雖同樣用手指撥動有如魔  
術方塊般，只不過它不是立體的 (是連續格子銜接的平面)



五、活動先提醒您幾件事情：這些問題都不是腦筋急轉彎！  
自己去想一想解決問題的方法，也讓大家動一動腦筋，作觀察、歸納與修正，  
作為下一次的參考！其中藏有其他翻摺玄機嗎？

為了尋求「數學通行證」，我們抽絲剝繭的對翻摺題型加以分析，先從代數  
開始，但是要花一點時間去想！題目裡面會適當的給您一些好的提示喔！請耐心  
的看完題目，花腦筋想一想，然後再作答。

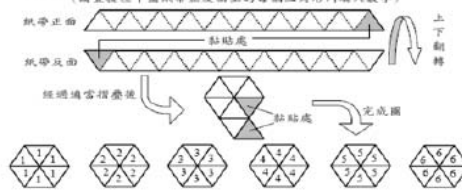
找出答案的方法有非常多種，譬如說：「找出它們的關係」、「想一想忘了些  
什麼？」、「先找出全部可能發生的情況，再一項一項刪除掉」……要會隨機應變  
啦！！準備好了嗎？準備出發進人！GO！

六、教學活動

(一) 隱藏了的格子與數字序號

師：哪位同學可以數出這裡共有多少個三角形？

1. 將下圖所示的長紙帶沿虛線做摺痕。可沿摺痕任意摺疊，經過一些步驟可摺  
成一個六邊形，最後以標記有黏貼處的兩個三角形相黏貼，使得六邊形上的  
六個數字均相同。不同的摺法所摺出的六邊形上的六個數字可出現都是 1，都  
是 2，……都是 6 (如下圖)。請問紙帶上兩側面的數字應如何配置？(只須填  
入數字即可)  
(請直接在下圖紙帶正反面上的每個三角形內填入數字)



生：因為整條長紙帶一面有 \_\_\_ 個正三角形，兩面有 \_\_\_ 個正三角形，  
但正六邊形每面包含 \_\_\_ 個正三角形，所以「一張紙有幾面呢？」二面！！  
不，這條長紙帶它可是堂堂有 \_\_\_ 面！並請寫出隱藏了數字序號在正反兩  
面的格子上！(最終解答寫於上圖) 這已經從一紙 \_\_\_ 面，進階到一紙 \_\_\_ 面。

# 附件 二十 拐摺六邊形



## Flexagon 拐摺六邊形

樹林國小資優班宋雅筠  
and  
江翠國中退休老師陳彩鳳

### What is Flexagon ?

The discovery of the first flexagon, a trihexaflexagon, is credited to the British student Arthur H. Stone who was studying at Princeton University in the USA in 1939, allegedly while he was playing with the strips he had cut off his A4 paper to convert it to letter size. Stone's colleagues Bryant Tuckerman, Richard P. Feynman and John W. Tukey became interested in the idea and formed the Princeton Flexagon Committee.  
<http://britton.disted.comosun.bc.ca/flexagon/Flexagon.html>

### 怎麼玩？

- [http://www.youtube.com/watch?v=SnnvovcC\\_o&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=SnnvovcC_o&feature=related)
- <http://www.drking.plus.com/hexagons/flexagons/simul.html>

### 小試身手 -- Tetraflexagon

- What is a Tetraflexagon?**  
Tetra為字首：意即四。  
A tetraflexagon is a 2x2 square, which you can fold from a strip of paper. The point is: If you open the flexagon like a book on the reverse side, then a new face appears, which was hidden before.



附件 二十三 摺紙中學數學之紅包花花

### 「摺紙中學數學」之紅包花花

李政憲  
新北市立林口國民中學

**壹、前言**

過完年後，平時總帶著到學校備用的紅包袋，可曾想過它的數學意義及應用了嘛？今年我買了兩包又送過年所集到的紅包袋(如圖一)，想到去年曾經帶過學生進行過摺紙的課程，並討論其中的數學，將所完成的折紙送給兩位老師作為賀禮「紅包花花」，在此簡單跟大家作分享摺紙作法與數學性質。


**貳、停紙紅包袋與高止討論**

在變化之前，我們先討論紅包袋的長寬比。事實上我們將紅包袋開口摺入後，可以得到一個長寬比的 2:1 的長方形(目前的紅包袋好像都是 2:1，在此介紹主要是傳統尺寸的紅包袋為主)至於如何證明它，我們只要以嚴格的作法就可以簡單的作說明：

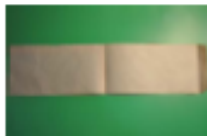
- 一、將開口摺入後的紅包袋長邊對摺(建議用透明紙質較薄的紅包袋以利後續操作的形成，如圖二)
- 二、再沿左方(或右方)短邊的對角線對摺(如圖三)。

如何？簡單的兩個步驟，我們將原來的矩形對摺成了一個重要的幾何三角形。由於兩個直角均為直角三角形，且對角線作為其對稱軸，加上短邊的兩端對稱等

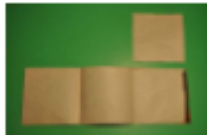
「摺紙中學數學」之紅包花花



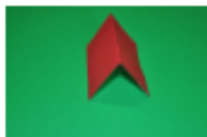
圖三、將開口摺入後的紅包袋長邊對摺



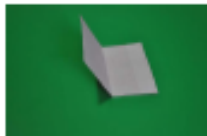
圖四、長邊再對折了長邊寬



圖五、長邊再對折一次成正方形



圖六、「山線」摺法



圖七、「山線」摺法

**參、保角紙袋的摺法**

除了常見的折紙半硬性的紙包，用方形紙摺紙袋的傳統摺法，在經過連續不斷的折疊下將紅包袋展開，即開口袋(將它對折即可開袋，後續動作則口袋有美觀)成了 4:1 的紙形(如圖四)。由於我們折下寬寬的長 3:1 的紙形，所以透過以上步驟二種對角線的方式，即可簡單快速的將一個正方形紙袋折成(如圖五)。再將折疊山谷摺紙式的操作了，先簡單介紹一下山線與谷線：

- 一、山線：所摺的山線，所摺的是摺紙袋展開後的折痕山線一樣(如圖六)。
- 二、谷線：摺紙袋展開後所摺的折痕山線一樣(如圖七)。

附件 二十四 摺紙中學數學之黃金試金石

### 「摺紙中學數學」之名片試金石

李政憲  
新北市立林口國民中學

我們在路上與人寒暄，或是到某些店家消費，決定下次再來，不免會向人索取名片，然而久了不用了，這些名片就堆積在皮夾或抽屜的某個角落，似乎不會再去用它們，殊不知這些名片蘊含了寶貴的數學訊息，十分值得我們去探討與研究。

近年來由於科技日新月異，個人化及客製化的名片更是層出不窮，樣式與大小琳瑯滿目。然而傳統規格的名片(如圖 1)仍是最常見也最易獲得，不知讀者是否曾經研究過傳統名片長寬的比值？傳統名片紙最常見的長寬比為黃金比例  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  (此種長方形稱為黃金矩形，參見附錄一與附錄二)其次為費氏數列前後項的比值，實際上，當費氏數列的項數愈大，其前後項的比值也會愈接近黃金比例，是故兩者的比例仍有其關聯性。




圖 1




圖 2

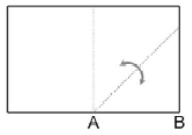


圖 3

科學教育月刊 第 338 期 中華民國一〇〇年五月

3. 摺出第 2 步驟於短邊上產生的點 C 與底邊另一端點 D 的連線  $\overline{CD}$  (如圖 4)
4. 將  $\overline{BC}$  與  $\overline{CD}$  對齊，摺出  $\angle BCD$  的角平分線 (如圖 5 至圖 6)
5. 將  $\overline{BE}$  與  $\overline{CD}$  對齊，摺出  $\angle CDE$  的角平分線 (如圖 7 至圖 8)

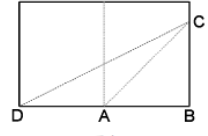


圖 4

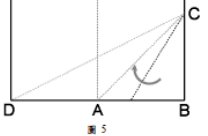


圖 5

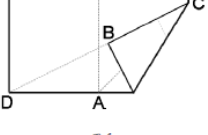


圖 6

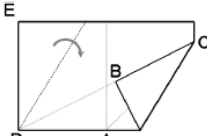


圖 7

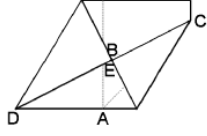


圖 8

奇妙的結果發生了！透過以上幾個簡單的步驟，我們居然讓原矩形右下角的 B 點與左上角的 E 點重合，想想看這告訴我們什麼結論呢？

請見圖 9，若假設名片紙的長為，因為我們摺出中線與等腰直角  $\triangle ABC$ ，故  $\overline{BC} = \frac{1}{2}a$ 。

## 附件 二十五 摺紙學勾股定理(創新教案)

新北市 100 學年國中數學學習領域創新教案甄選成果報告

單元名稱	康軒版第三冊 2-3 勾股定理		
適用年級	八年級	教學時間(節數)	4 節
設計者	新北市林口國中「摺紙中學數學」工作坊團隊		
分年細目	8-s-08 能理解畢氏定理(Pythagorean Theorem)及其應用。		
設計理念	透過摺紙活動,讓學生從做中學,了解透過摺紙,學習勾股定理不同的證明方式,進一步應用於課本與習作的練習。		
教學活動流程	<p>(第一節課)(課前發放學習單、色紙,視需求安裝電腦螢幕繪圖機)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>說明本節課目的是為了透過摺紙,進行勾股定理的證明;</li> <li>學生跟隨教師大型教具操作或簡報引導,進行「摺紙證明勾股定理」學習單並回答相關問題;(40min)</li> <li>由學生觀察,教師歸納勾股定理結論。(5min)</li> </ol> <p>(第二節課)(課前發放學習單,並先安裝電腦螢幕繪圖機)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>教師演示「勾股定理的介紹與證明」簡報;(20min)</li> <li>教師帶領學生完成「勾股定理」應用練習;(10min)</li> <li>教師帶領學生進行課本例題,並指派課本隨堂練習為回家功課。(15min)</li> </ol> <p>(第三、四節)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>檢討課本隨堂練習,完成課本自我評量並檢討,並指定習作為回家功課(45min)</li> <li>檢討習作(30min)</li> <li>討論不同證明方式的差異性(15min)</li> </ol>		
注意事項	學習單與提供色紙大小需符合以利學生操作 教學前應安裝螢幕繪圖機以利教學進行		
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
【活動一】 摺紙學勾股定理	(搭配附件一:「摺紙證明勾股定理」簡報) 1. 請問剩餘白色長方形的長與寬分別為多少? 2. 請問綠色長方形的面積	1. 教學前提醒學生帶直尺(畫線、對齊與測量用) 2. 學生利用實際色紙操作,配合	1. 透過口頭詢問,了解學生理解狀況並作結論歸納 2. 完成學習單(附件

3. 請問摺進來的三角形面積為多少?	教師大型教具或資訊融入教學,反覆操作並進行計算!(教師發放色紙時請學生對照色紙與學習單框架大小是否一致)	三),教師歸納本節課結論	
4. 請問兩個直角三角形所形成的角度為多少度?	3. 可配合「摺紙證明勾股定理」簡報,教師在台前操作,利用大型教具輔助教學		
5. 請問兩個綠色三角形的三個角度是否完全相同?三邊長度呢?	4. 建議由教師進行示範,並確認每位學生皆能完成指定動作		
6. 請問三個綠色三角形的三個角度是否完全相同?三邊長度呢?	5. 透過教師提問,讓學生了解每一步驟的意義與數學概念		
7. 請問目前整個四邊形是哪種四邊形?為什麼呢?	6. 藉由教師學生互動對話,讓學生了解每一摺紙動作與數學證明關係		
8. 請問中間白色四邊形是哪種四邊形?為什麼呢?	7. 本節課教學末,可請同學翻開課本對照勾股定理結論		
9. 請問白色四邊形的邊長與面積分別為多少呢?	1. 教師在操作簡報時,可視學生程度與了解狀況,決定補充		
10. 請列出此時正方形與四個小三角形及中間白色正方形面積關係?	1. 教師口頭詢問學生對於不同證明方式的了解		
【活動二】	(搭配附件二:「勾股定理的介紹與證明」簡報) 1. 透過「勾股定理的介紹與證明」簡報,教師說明勾股		

## 附件 二十六 畢氏摺學——利用摺紙摺出畢氏數

圖 4.摺到  $\frac{1}{2}$  處的示意圖

圖 6.摺到  $\frac{1}{4}$  處的示意圖

計算過程如下

設畢氏數列(x,y,z)有以下關係式:

$$\begin{cases} y+z=ax \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

$$z=ax-y$$

$$x^2+y^2=(ax-y)^2$$

$$x^2+y^2=a^2x^2-2axy+y^2$$

$$x^2=a^2x^2-2axy$$

$$(a^2-1)x^2-2axy=0$$

$$x[(a^2-1)x-2ay]=0$$

$$\therefore x \neq 0$$

$$\therefore (a^2-1)x=2ay \longrightarrow x:y=2a:(a^2-1)$$



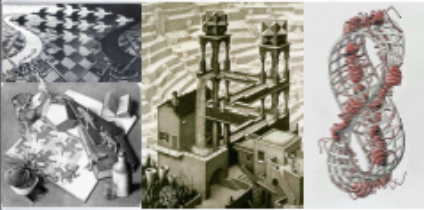

圖 5.摺到  $\frac{1}{3}$  處的示意圖

8

## 附件 二十七 從課堂教學到生活應用

 <p>從課堂教學到生活應用..... 談摺紙與數學</p> <p>新北市林口國中 / 數學輔導團 李政寬 <a href="http://maths.nyc.edu.tw">http://maths.nyc.edu.tw</a></p>	<p>本日講綱</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• 摺紙與中學數學 (1hr)<ul style="list-style-type: none"><li>- 利用摺紙學乘法公式</li><li>- 利用摺紙學勾股定理</li></ul></li><li>• 摺紙與生活數學 (1hr)<ul style="list-style-type: none"><li>- 摺紙摺出白銀比</li><li>- 影印紙的再利用</li><li>- 摺紙摺出黃金比</li><li>- 黃金名片再利用</li></ul></li></ul> 
 <p>摺紙與中學數學</p> <p>利用摺紙學乘法公式 利用摺紙學勾股定理</p>	<p>利用摺紙學乘法公式</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• 和的平方公式 <a href="#">證明</a></li><li>• 差的平方公式 <a href="#">證明</a></li><li>• 完全平方差公式 <a href="#">證明</a></li></ul> 

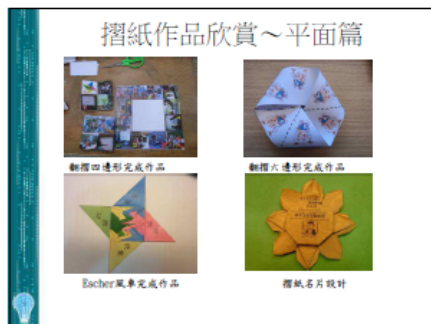
## 附件 二十八 鑲嵌藝術與數學

 <p>當藝術遇上數學 ~ 淺談Escher</p> <p>新北市林口國中 / 數學輔導團 李政寬 於 山脚國中 <a href="http://maths.nyc.edu.tw">http://maths.nyc.edu.tw</a></p>	<p>Who's Escher?</p> 
<p>Escher v.s. Mathematics</p> 	<p>Tiling</p> 

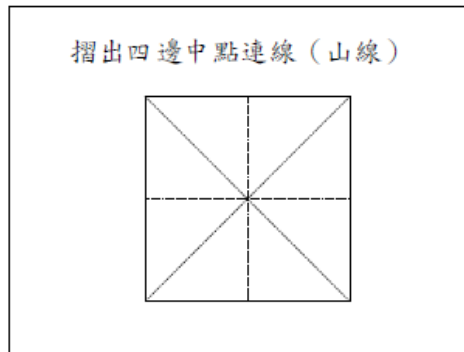
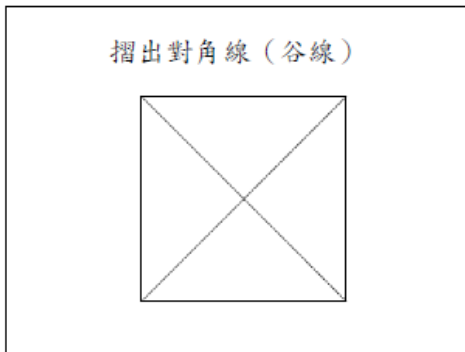
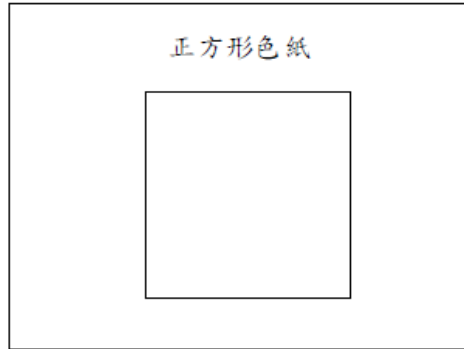
## 附件 二十九 創新教案教案甄選發表



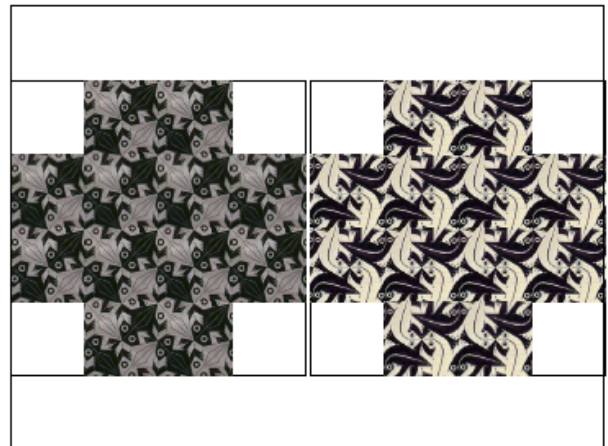
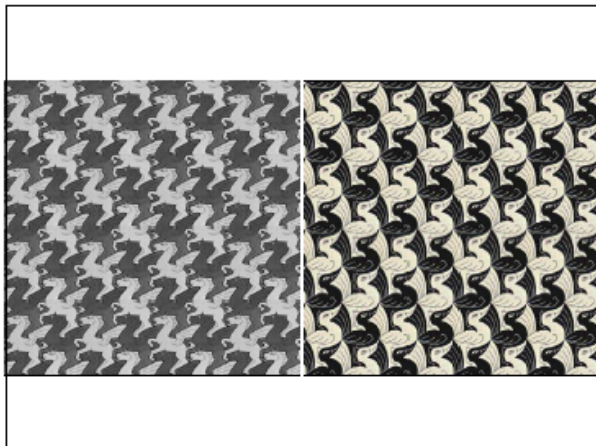
## 附件 三十 從動手操作到創意發想：談摺紙與數學 II



附件 三十一 摺紙組合十字星

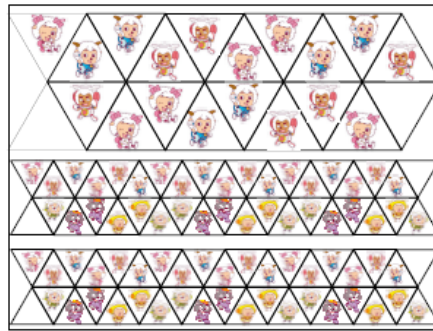
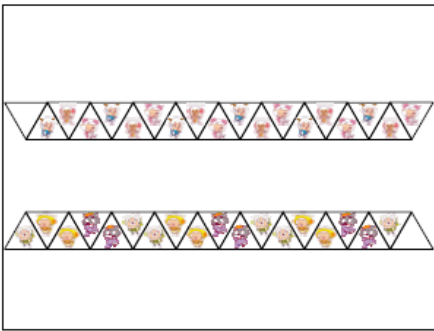
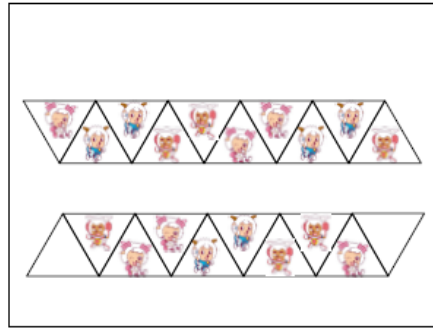
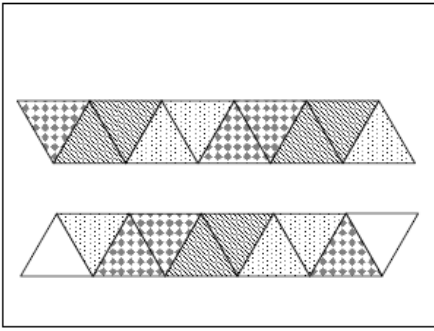


附件 三十二 Escher 翻轉正方形

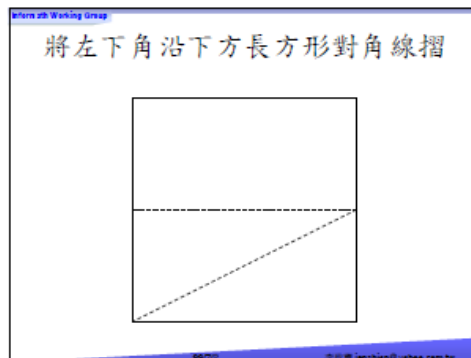
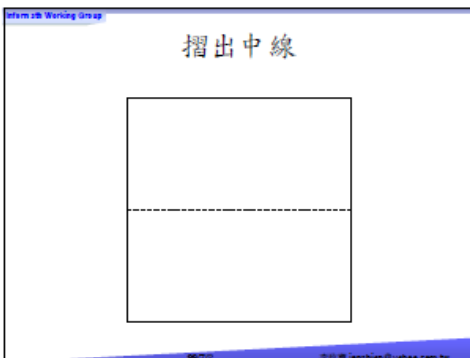
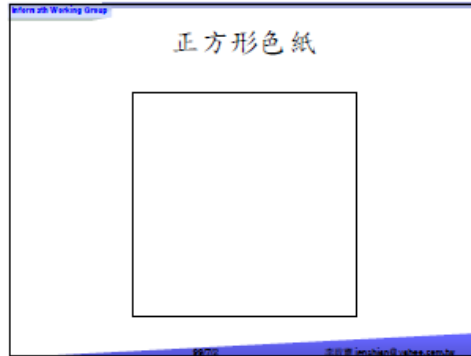




附件 三十三 拐摺六邊形



附件 三十四 摺紙五等份



## 附件 三十五 摺出畢氏數

討論直角三角形CEF三邊長關係

設邊長為a，往上摺出D產生的邊為x

$$b^2 + x^2 = (a-x)^2$$

$$b^2 + x^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

$$b^2 = a^2 - 2ax$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

$$a-x = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

A  $\overline{EF} : \overline{CF} : \overline{EC}$   
 $= (a^2 + b^2) : (a^2 - b^2) : 2ab$

討論直角三角形CEF三邊長關係

$$a^2 + b^2$$

$$a^2 - b^2$$

討論直角三角形CEF三邊長關係

邊	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1, 1, 1								
2	3, 4, 5								
4	15, 8, 17	12, 16, 20	7, 24, 25						
5	24, 10, 26	18, 24, 30	16, 30, 34						
6	35, 12, 37	24, 32, 40	27, 36, 45	20, 48, 52					
7	48, 14, 50	35, 28, 35	40, 42, 58	33, 56, 65	24, 70, 74				
8	63, 16, 65	48, 32, 60	55, 44, 61	60, 48, 72	48, 60, 72	36, 84, 90			
9	80, 18, 82	63, 36, 69	72, 54, 84	80, 72, 88	72, 80, 88	60, 96, 108	45, 108, 117		
10	99, 20, 101	80, 40, 104	90, 60, 110	100, 80, 120	90, 100, 110	80, 120, 130	72, 144, 156		

參考資料

- 畢氏定理之趣味研究，國立草屯商工：潘冠伶、張慈容。

## 附件 三十六 摺紙學根式化簡

摺紙與根式化簡

北縣林口國中 李政憲  
[jenshian@yahoo.com.tw](mailto:jenshian@yahoo.com.tw)

正方形色紙

設其邊長為2

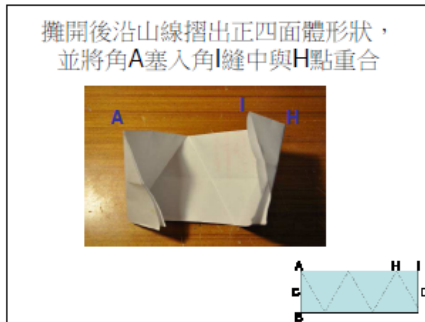
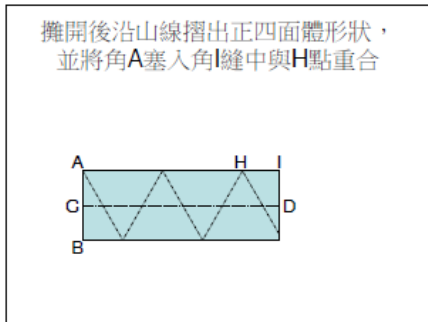
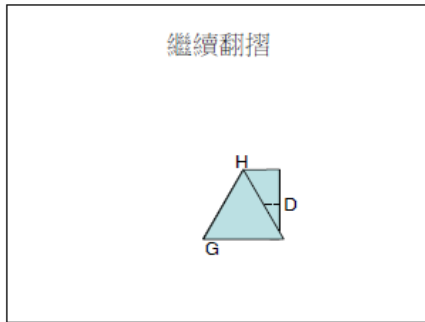
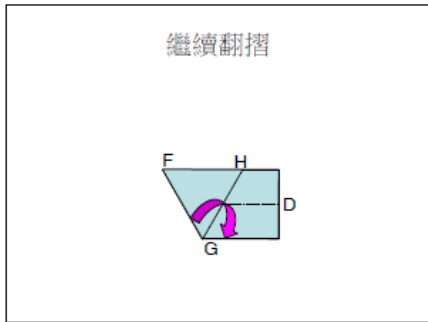
Q1：請問面積為多少？

四角向內摺

四角向內摺

Q2：請問此時是什麼四邊形？面積變為多少？邊長又是多少？

附件 三十七 麗林國小推動「正四面體摺紙」活動



附件 三十八 從正多邊形對稱到多角星形設計

從正多邊形對稱到多角星形設計

北縣林口國中  
李政憲  
[jenshian@yahoo.com.tw](mailto:jenshian@yahoo.com.tw)

何謂「對稱」？

- ✖ 正方形對稱嗎？對稱軸有幾條？
- ✖ 將正方形對摺一次後，仍然對稱嗎？
- ✖ 對摺兩次呢？
- ✖ 要如何對摺，才能保證對摺後的圖形是對稱的？
- ✖ 如果將正方形換成其他的正多邊形呢？

# 附件 三十九 「乘法公式」學習單

**摺紙中學數學— 乘法公式** 班級：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_

**一、 和的平方公式**——請將色紙置於底下正方形中跟著操作，並回答以下問題：

1. 沿邊摺出任意虛線後還原；
2. 將右下角摺至摺痕處；
3. 將下方直角梯形向上摺後還原；
4. 將右下角攤開還原。

→請問所產生的四個矩形，面積有何關係？

**二、 差的平方公式**——請將色紙置於底下正方形中跟著操作，並回答以下問題：

5. 沿邊摺出任意虛線；
6. 摺進的矩形角落向上翻摺；
7. 沿直角三角形的底部向上翻摺；
8. 攤開還原；
9. 剪下如圖長方形；
10. 補上如圖正方形；
11. 再剪下如圖長方形。

→請問最後剩下的矩形，與原正方形色紙面積的關係為何？

# 附件 四十 「勾股定理」學習單

**摺紙中學數學— 勾股定理** 班級：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_

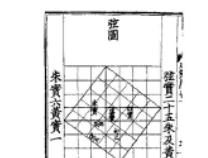
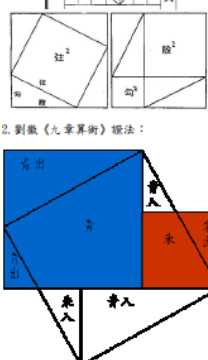
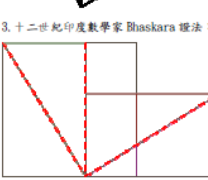
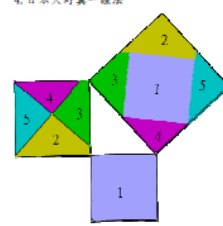
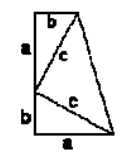
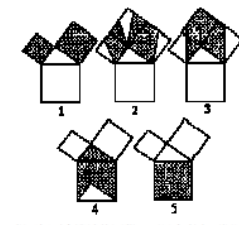
請將色紙置於底下正方形中跟著操作，並回答以下問題：

1. 向左摺出任意虛線形成長方形；
2. 將摺進來的角向上翻摺；
3. 將摺進來的部份向右翻摺還原；
4. 摺出圖示摺痕，將直角三角形向內摺；
5. 摺出圖示摺痕，將直角三角形向內摺，並對齊第一次摺出的直角三角形；
6. 摺出圖示摺痕，將直角三角形向內摺，並對齊第二次摺出的直角三角形；
7. 右下角翻開還原；
8. 摺出圖示摺痕，將直角三角形向內摺，並對齊第三次摺出的直角三角形；
9. 將四個直角三角形向外翻；

Q1. 請列出步驟 8. 的正方形與四個小三角形及中間白色正方形的面積關係？

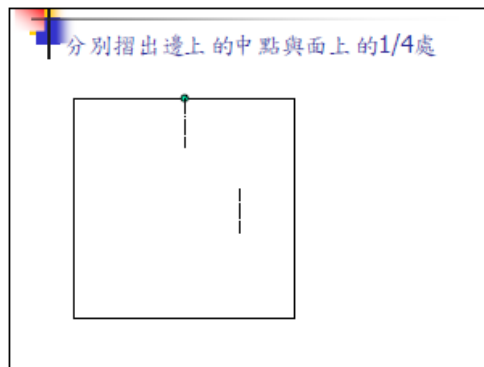
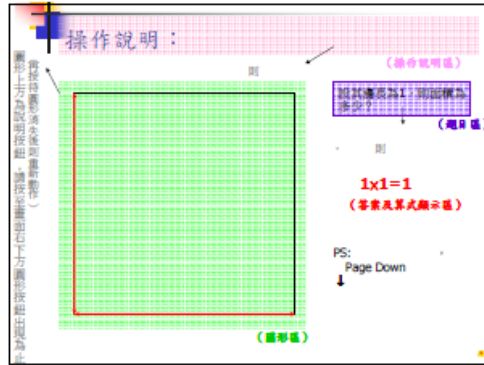
Q2. 請列出步驟 9. 整個正方形、四個直角三角形及中間白色正方形的面積關係？

**其他勾股定理的證明方式：(同學可自行研究)**

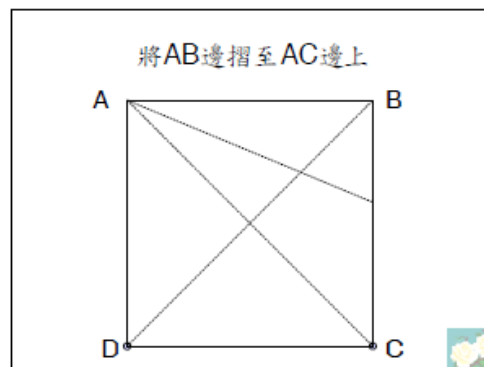
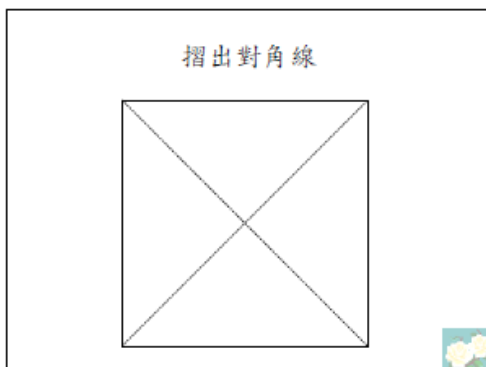
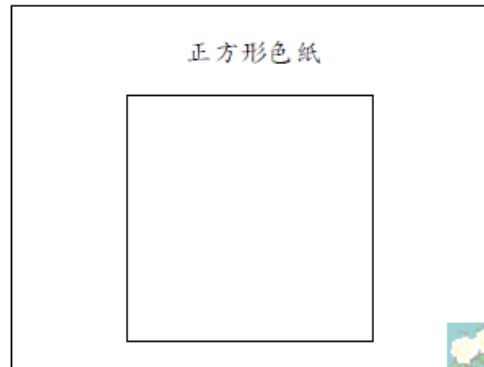
1. 漢朝趙君卿證法：  

2. 劉徽《九章算術》證法：  

3. 十二世紀印度數學家 Bhaskara 證法：  

4. 日本大野真一證法：  

5. 美國總統 Garfield 證法：  

6. 希臘數學家歐幾里得證法：  


想了解更多證法的同學，可以參考底下網址：  
<http://www.cer-the-3nos.org/pythagoras/index.shtml#5>  
<http://web2.ccut.tz.edu.cn/ctee/mc11n/zt/zt11a/pythagoras/>  
<http://163.20.9.8/dyna/mem/index.php?acc=math>

附件 四十一 六角芒星互動式簡報



附件 四十二 山茶花互動式簡報



## 附件 四十三 太陽花相框摺法



太陽花相框摺法(頂部)

交大AMA團隊/新北市數學輔導團  
 新北市林口國中 李政憲  
 於 師大資優碩士學分班 100112  
[ljenshian@yahoo.com.tw](mailto:ljenshian@yahoo.com.tw)



AMA Working Group in NCTU

### 教材解析(僅列出國中部份)

- 對應教材單元：平行與四邊形 (國中二年級下學期)
- 能力指標：
  - 3-4-05能理解畢氏定理及其逆敘述，並用來解題。
  - 3-4-07能理解平面上兩平行直線的各種幾何性質。
  - 3-4-12能理解特殊三角形(如正三角形、等腰三角形、直角三角形)的幾何性質。
  - 3-4-13能理解特殊四邊形(如正方形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形與正多邊形)的幾何性質。
- 適用的對象(先備能力)：國中二年級，數學程度中等以上，已學習勾股定理，具備簡單幾何運算概念
- 評量標準：依教師討論(專家效度)暨學生預試(結果參照)共同訂定之。
- 評量時間約30-40分鐘

AMA Working Group in NCTU

### 摺出一條對角線後還原

小學

Q1：請將兩個三角形疊成一種三角形？

等腰直角三角形



15%

中學

Q1：請將中間的摺痕與原正方形的邊長比為多少？

$\sqrt{2}:1$

AMA Working Group in NCTU

### 摺出另一條對角線後還原

小學

Q2：請將四個三角形形狀是否相同？為什麼呢？

是



15%

中學

Q2：請將兩條對角線有何關係？

互相垂直平分且相等

## 附件 四十四 摺紙中學數學回饋單

「摺紙中學數學」授課後回饋單： 林口國中\_\_\_\_年\_\_\_\_班 性別：男女  
 填答日期： 年 月 日

親愛的同學，感謝你協助老師利用摺紙完成數學的單元學習，請根據你個人的學習狀況回答以下問題，本回饋單不採記姓名，請詳實回答以方便讓老師了解你的想法哦！ 新北市林口國中/數學輔導團 李政憲

- 透過摺紙你曾學過的數學單元有：\_\_\_\_\_ (可翻課本回答此問題)
- 你覺得利用摺紙讓你對以上數學知識的了解程度：  
非常有幫助 有幫助 沒有幫助 讓我更不清楚
- 你覺得利用摺紙讓你對數學學習的興趣：  
提昇許多 有點提昇 沒有提昇 愈來愈沒興趣
- 你覺得老師利用摺紙教學時，讓你印象最深刻的是：(可複選)  
利用一種新的方式學習數學，感覺很新鮮  
透過動手操作學習數學，感覺更容易了解  
從摺紙中學習數學概念，感覺很有趣  
其他(請說明)：\_\_\_\_\_
- 你覺得老師利用摺紙教學時，你曾遇到的困難是：(可複選)  
沒有遇到困難  
無法跟著老師同步摺紙  
無法透過摺紙學習要學的數學概念  
其他(請說明)：\_\_\_\_\_
- 對於摺紙學習數學的活動，其他想跟設計老師或授課老師說的話：

# 附件 四十五 新北市數學輔導團教學演示回饋單

## 回饋單統計(學生回饋)

日期：100年 10月 28日

三芝國中，8年 6班

發放份數：27份，回收份數：27份

一、性別：

男生		女生		null	
16人	59.3%	11人	40.7%	0人	%

二、你覺得你是否了解這堂課老師上課的內容？

完全了解		大部份了解		有一點點懂		完全不懂		null	
9人	33.3%	16人	59.3%	2人	7.4%	0人	%	0人	%

其他：

三、你覺得你自己這堂課上課的精神如何？

全神貫注		有精神		有時會分心		精神不佳		null	
9人	33.3%	15人	55.6%	2人	7.4%	1人	3.7%	0人	%

其他：

四、你覺得上完這堂課，是否能增加你對數學的興趣？

是		否		Null	
23人	85.2%	4人	14.8%	0人	%

理由：

1. 比較輕鬆 2. 沒有	理由： 1. 我覺得還好。 2. 沒有耐心算數學
------------------	--------------------------------

3. 因為讓我覺得數學也可以這麼好玩！	3. 自己放棄
4. 因為數學很神奇！	4. 太多老師，不自在
5. 我對數學不了解，上完這次的課，讓我印象深刻	
6. 老師講話很有趣	
7. 摺紙很有趣	
8. 滿好玩的	
9. 很有趣！	
10. 我覺得這個老師講數學活起來了	
11. 老師上課很有趣~	
12. 本來討厭數學上了這堂課就有點喜歡了	
13. 以前就對數學很有興趣，現在就增加了更多了	
14. 看起來算數學很有趣，因為可以動動腦	
15. 真有趣	
16. 上課很有趣	
17. 覺得數學很有趣	
18. 以前都聽不懂，但現在聽懂了所以會想上課~	
19. 因為很有趣	

五、這節課中，老師在教哪一部分時，讓你印象最深刻？(條列呈現)

- 4小三+小正=大正
- 勾股定理
- 我印象最深刻的事「劉徽—九章算術」，因為我覺得他好神奇
- 老師再教我們三角形的度數，讓我印象深刻
- 老師在這堂課，教折紙的部份
- 勾股定理
- 我終於懂什麼叫勾股定理
- 學會數學 2-3 勾股定理
- 最後一部份劉徽證明的那一幕，我想……當時劉徽解開並證明時，一定很驚訝數學的奧妙
- 摺三角形的時候